ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА НА НЕИЗВЕСТНОМ КОНТУРЕ

М. Н. Журавлев

Марийский государственный технический университет
koryukin@mpicnit.mari.su

Рассмотрим в физической плоскости z область G_z в виде криволинейной трапеции $ABCD$, где на CD $y = 0$, $0 \leq x \leq l$, на AD $x = l$, на CB $x = 0$, кривая AB – неизвестный контур в полосе $0 \leq x \leq l$.

Требуется построить неизвестную часть AB – контур магнита и найти аналитическую в области G_z функцию $w(z)$, граничные значения которой

$$\varphi = L,\ z \in AB;\ \varphi = 0,\ z \in CD;\ \psi = 0,\ z \in BC;\ \psi = C_0,\ z \in AD,$$

причем константа C_0 пока неизвестна. Кроме того, на CD

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{1}$$

где $f(x) = H_0 + H_1 \cos(\pi x/l)$.

В плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ имеем прямоугольник G_w, где на AB $\varphi = L$, на CB $\psi = 0$, на CD $\varphi = 0$, на AD $\psi = C_0$, причем

$$C_0 = \int\limits_0^l \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx = -\int\limits_0^l \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx = -\int\limits_0^l (H_0 + H_1 \cos\frac{\pi x}{l})\, dx = -H_0\, l.$$

Функция

$$w(\zeta) = -\frac{iC_0}{2K(\lambda)} F(\arcsin\zeta, \lambda) + L + \frac{iC_0}{2} \tag{2}$$

осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\zeta \geq 0$ на G_w [1], где $K(\lambda)$ и $F(\varphi, \lambda)$ – соответственно полный эллиптический и эллиптический интегралы первого рода при модуле $\lambda = \lambda_0 - 0,25\lambda_0^3 + 0,0547\lambda_0^5$, $\lambda_0 = 4\exp(-\pi H_0 l/L)$ [2] с следующим соответствием точек: $D \to -1/\lambda$, $A \to -1$, $B \to 1$, $C \to 1/\lambda$.

Определяя в (2) $\mathrm{Im}w(\xi) = \psi(\xi)$ при $1/\lambda \le \xi < \infty$, получим

$$\psi(\xi) = \frac{C_0}{2K(\lambda)}[K(\lambda) - F(\arcsin\frac{1}{\lambda\xi}, \lambda)]. \tag{3}$$

С другой стороны, из условия (1) следует

$$\psi = -\int_0^x \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dx = -\int_0^x (H_0 + H_1 \cos\frac{\pi x}{l})\, dx = -H_0 x - \frac{l}{\pi} \sin\frac{\pi x}{l} =$$

$$= -(H_0 + H_1)x - H_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

откуда, обращая ряд, получим с учетом формулы (3)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi^k(\xi), \quad 1/\lambda \le \xi < \infty. \tag{4}$$

На оси ξ аналитическая функция $z(\zeta)$, конформно отображающая $\mathrm{Im}\zeta \ge 0$ на физическую область G_z, удовлетворяет соотношениям

$$y = 0,\ 1/\lambda \le |\xi| \le \infty;\ x = l,\ -1/\lambda \le \xi \le -1;\ x = 0,\ 1 \le \xi \le 1/\lambda,$$

кроме того, на луче $1/\lambda \le \xi \le \infty$ известно дополнительное условие (4).

Временно предполагая известной функцию $x = x(\xi), \xi \in [-1; 1]$, имеем смешанную задачу для $z(\zeta)$, решение которой записывается с помощью формулы Келдыша–Седова [1]

$$z(\zeta) = -\frac{\sqrt{\zeta^2 - m^2}}{\pi} \left[\int_{-m}^{-1} \frac{l\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \zeta)} + \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \zeta)} \right],$$

где $m = 1/\lambda$ и у корня $\sqrt{\xi^2 - m^2}$ выбирается ветвь, которая положительна на луче $m \le \xi \le \infty$. Осуществляя в этой формуле предельный переход при $\zeta \to \xi$ $(m \le \xi \le \infty)$ по формулам Сохоцкого и выделяя $Rez(\xi)$, будем иметь

$$x(\xi) = -\frac{\sqrt{\xi^2 - m^2}}{\pi} \left[\int_{-m}^{-1} \frac{l\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \zeta)} + \int_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \zeta)} \right]. \tag{5}$$

Сравнивая (5) с (4), получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром, заданным в полуполосе $-1 \le \tau \le 1$, $m \le \xi \le \infty$,

$$-\frac{\sqrt{\xi^2 - m^2}}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \xi)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\xi^2 - m^2}}{\pi} \int\limits_{-m}^{-1} \frac{l\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \xi)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi^k(\xi), \tag{6}$$

служащее для определения неизвестной функции $x(\tau)$, $\tau \in [-1; 1]$.

Преобразуем (6) к виду

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x(\tau)\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \xi)} = -\int\limits_{-m}^{-1} \frac{l\, d\tau}{\sqrt{m^2 - \tau^2}(\tau - \xi)} -$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\xi^2 - m^2}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi^k(\xi) \equiv \Phi(\xi)$$

и приняв $x_1(\tau) = x(\tau)/\sqrt{m^2 - \tau^2}$, окончательно имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{x_1(\tau)\, d\tau}{\tau - \xi} = \Phi(\xi). \tag{7}$$

Предположим, что неизвестная функция $x_1(\tau)$ представима на отрезке $[-1; 1]$ сходящимся рядом $x_1(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tau^k$. Ядро $1/(\tau - \xi)$ и функцию $\Phi(\xi)$ разложим по степеням $1/\xi$:

$$\frac{1}{\tau - \xi} = -\frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{1 - \tau/\xi} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{\xi^k}, \quad \Phi(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\xi^k}.$$

Полученные разложения подставим в (7). Имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \tau^n \right) \left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{\xi^k} \right) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\xi^k}.$$

Под интегралом, перемножая ряды и переставляя знаки сумм и интеграла, после интегрирования получим равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^{k+n}}{k+n}b_n\right)\frac{1}{\xi^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\xi^k},$$

откуда относительно неизвестных коэффициентов b_n возникает линейная алгебраическая система уравнений $AX = B$, где A – симметричная матрица с элементами $a_{k,n+1} = 0$, если $k+n = 2m$; $a_{k,n+1} = 1/(k+n)$, если $k+m = 2m+1$, X– вектор-столбец с элементами $x_n = b_n$, B – вектор-столбец с элементами $c_k/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Определив b_n, а вместе с ними $x(\xi) = \sqrt{m^2-\xi^2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n$, можем написать параметрическое уравнение неизвестного контура

$$x=\sqrt{m^2-\xi^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n,\quad -1\le\xi\le 1,$$

$$y=-\frac{\sqrt{m^2-\xi^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\tau^n\frac{d\tau}{\tau-\xi}+$$

$$+\frac{l}{\pi}\ln\left(\frac{\lambda[\sqrt{(m^2-\xi^2)(m^2-1)}+m^2+\xi]}{1+\xi}\right).$$

Исключая параметр ξ из выражений

$$x=\sqrt{m^2-\xi^2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\xi^n,\qquad \psi(\xi)=-\frac{C_0}{2K(\lambda)}F(\arcsin\xi,\lambda)+\frac{C_0}{2},$$

получим функцию $\psi = f(x)$ как функцию распределения магнитного потока на неизвестном контуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1965. – 716 с.

2. Фильчаков П.Ф. *Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями*, Т. 1. – Киев: Изд-во АН УССР, 1959. – 308 с.